V-11 (44 min) 16-Marzo-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Serie de Fourier (2ª parte)**

Sea campo representado por función $\phi(x,t)$, bien comportada en intervalo $[-L/2, +L/2]$ y periódica, con desarrollo de Fourier, según (VII) de resumen de V-10: $\boldsymbol{\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\ e^{iK_n x}}$ (hemos llamado $K_n = \frac{2\pi}{L} n$)

$\phi(x,t)$ depende del tiempo porque son funciones del tiempo las constantes complejas. Para encontrar las $C_n(t)$ imponemos que $\phi(x,t)$ cumpla alguna ecuación (p.ej: ec. Schrodinger, ec. de ondas, etc).

Obtención de las $C_n(t)$ imponiendo a $\phi(x,t)$ la ec. de ondas: $\boldsymbol{\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \ddot{C}_n(t) e^{iK_n x} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} -K_n^2\, C_n(t) e^{iK_n x} \end{aligned}\right\} \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\ddot{C}_n(t) + v^2 K_n^2\, C_n(t)\right] e^{iK_n x} = 0 \xrightarrow{\forall n\ \forall x\ \forall t} \ddot{C}_n(t) + v^2 K_n^2\, C_n(t) = 0$$

Relación de dispersión

Llamamos $\omega_n = v|K_n| > 0$ (valor absoluto cuando n es negativa $\rightarrow \omega_n = \omega_{-n}$) $\quad \boldsymbol{\omega_n = v\left|\frac{2\pi}{L} n\right| > 0}$ **(I)**

y nos queda una típica ecuación diferencial de 2º orden para hallar los $C_n(t)$: $\quad \ddot{C}_n(t) + \omega_n^2\, C_n(t) = 0$

Ec. diferencial, cuya solución con dos ctes. complejas A_n y B_n, para cada n es: $\quad C_n(t) = A_n\, e^{-i\omega_n t} + B_n\, e^{i\omega_n t}$

Por otro lado, dijimos en el V-10 que $C_{-n} = C_n^* \xrightarrow{\omega_{-n} = \omega_n} A_{-n}\, e^{-i\omega_n t} + B_{-n}\, e^{i\omega_n t} = A_n^*\, e^{i\omega_n t} + B_n^*\, e^{-i\omega_n t}$

Se deduce: $A_{-n} = B_n^*$; $B_{-n} = A_n^*$ De ambas igualdades podemos llegar a: $B_n = (A_{-n})^*$, luego ponemos:

$$\boldsymbol{C_n(t) = A_n\, e^{-i\omega_n t} + A_{-n}^*\, e^{i\omega_n t}} \qquad \textbf{(II)}$$

Se puede comprobar, al cambiar n por $-n$, que se cumple $C_{-n} = C_n^* \quad (A_n\ y\ A_{-n} \in \mathbb{C})$

EJEMPLO.- Conociendo $\phi(x,t)$ se pueden hallar las $C_n(t)$. Al revés, conociendo las constantes complejas A_n, y por lo tanto las $C_n(t)$, podemos hallar $\phi(x,t)$. Vamos a ver un ejemplo sencillo del segundo caso:

1) Suponemos que conocemos $A_1 = a_1 e^{i\theta_1}$ y todos los demás $A_n = 0$ (para todo $n \neq 1$)
Utilizando (II):

$$C_1(t) = A_1\, e^{-i\omega_1 t} + \cancel{(A_{-1})^*}\, e^{i\omega_1 t} = A_1\, e^{-i\omega_1 t} = a_1 e^{i\theta_1} e^{-i\omega_1 t} = a_1 e^{i(\theta_1 - \omega_1 t)}$$

$$C_{-1}(t) = \cancel{A_{-1}}\, e^{-i\omega_1 t} + (A_1)^*\, e^{i\omega_1 t} = (A_1)^*\, e^{i\omega_1 t} = a_1 e^{-i\theta_1} e^{i\omega_1 t} = a_1 e^{-i(\theta_1 - \omega_1 t)}$$

Utilizando ahora (VII) del resumen de V-10: $\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\ e^{iK_n x} = C_{-1} e^{iK_{-1} x} + C_1 e^{iK_1 x}$

Teniendo en cuenta que $K_{-1} = \frac{2\pi}{L}(-1) = -\frac{2\pi}{L}(+1) = -K_1 \quad \Longrightarrow \phi(x,t) = C_{-1} e^{-iK_1 x} + C_1 e^{iK_1 x}$

$$\phi(x,t) = a_1 e^{-i(\theta_1 - \omega_1 t)} e^{-iK_1 x} + a_1 e^{i(\theta_1 - \omega_1 t)} e^{iK_1 x} = a_1 \left[e^{-i(-\omega_1 t + K_1 x + \theta_1)} + e^{i(-\omega_1 t + K_1 x + \theta_1)}\right]$$

Aplicando la fórmula de Euler, puesto que en el corchete hay una suma de complejos conjugados, nos queda:

$$\phi(x,t) = 2a_1 \cos(\omega_1 t - K_1 x - \theta_1) \qquad \textbf{(III)}$$

El resultado anterior representa la ecuación de una onda de amplitud $2a_1$, frecuencia angular ω_1, longitud de onda $2\pi/K_1$, fase inicial θ_1, propagándose con velocidad $v = \omega_1/K_1$

2) Si suponemos que conocemos $A_1 = a_1 e^{i\theta_1}$ y $A_3 = a_3 e^{i\theta_3}$ y todos los demás $A_n = 0$ (para todo $n \neq 1$ y 3)

De forma similar se llegaría a: $\phi(x,t) = 2a_1 \cos(\omega_1 t - K_1 x - \theta_1) + 2a_3 \cos(\omega_3 t - K_3 x - \theta_3)$ **(IV)**

Resultado que representa la superposición de dos ondas, de distinta amplitud, distinta frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación, moviéndose en el mismo sentido.